УДК 514.521.2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЙ ЛАМБЕРТА В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА БОЛЕЕ ПРОСТЫЕ СУММЫ

А.П. Буланов[1]

1 *bksen2002@yandex.ru*; Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ

В этом сообщении обсуждается рекуррентная формула определения показателей обратной цепной экспоненты, которая была получена ранее как обобщение понятия первоначальной функции Ламберта. Приводится один из способов вычисления обратного показателя a_n путем разложения исходной суммы на частичные суммы, порядок суммирования которых строго меньше n. В качестве примера этим методом вычислен обратный показатель a_6.

Ключевые слова: цепная экспонента, показатель цепной экспоненты, взаимно обратные цепные экспоненты, суммирование по всем ненулевым комбинациям, порядок суммирования, последовательность показателей, гиперфункция Ламберта.

Рассмотрим две цепные экспоненты

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \tag{1}$$

$$L_a(w) = w \cdot A(w). \tag{2}$$

Цепная экспонента (1) определяется последовательностью функций:

$$B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}, B_1(z) = e^{b_2 z \cdot B_2(Z)}, \ldots, B_{k-1}(z) = e^{b_k z \cdot B_k(z)}.$$

Здесь вводится обозначение $B(z) =< e^Z; b_1, b_2, ... >$. Аналогично определяется экспонента (2), где $A(w) =< e^w; a_1, a_2, ... >$ Пусть последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $b_n \neq 0, = 1, 2, .., \overline{\lim}|b_n| = \overline{b} < \infty$ тогда предельная функция $B(z) = \lim\limits_{k->\infty} < e^z; b_1, b_2, ..., b_k, 0, 0, ... >$ сходится в круге $K = \{z : |z| < \frac{1}{e\overline{b}}\}$ (см. [1] и [2]). Цепные эксоненты (1) и (2) могут быть взаимно обратными функциями, тогда последовательность показателей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется рекуррентной формулой (5) приведенной ниже (см. также [3], с. 69). Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z; -b, -b, ..., \rangle \tag{3}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w; b, 0, 0, ... \rangle. \tag{4}$$

Из определения (3) мы видим $b_1 = b_2$; тогда включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3). Вместо исходной функции (4) можно рассматривать конечную цепную экспоненту

$$z = w \cdot \langle e^w; b_1, ..., b_e, 0, 0, ... \rangle,$$

где $b_k \neq 0, k = 1, 2, ..., l$, или бесконечную $z = w \cdot \langle e^w; b_1, b_2, ... \rangle$.

Это обощение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (3) и гиперфункциями Ламберта (Lambert′s HW function), которые ввел И.Н. Галидакис в 2004 г. HW-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике (см. [4]- [6]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности т. $w = 0$ (или наоборот по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), то есть по заданным показателям $b_1, b_2, ...,$ найти показатели $a_1, a_2, ...$

Легко определяются первые три показателя:

$$a_1 = -b_1, a_2 = b_2 - b_1, a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3).$$

Показатели a_4, $a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \cdot \Big\{ \sum_{k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} ... k_{n-2}^{n-1}}{k_1! k_2! ... k_{n-1}!} \times$$
$$\times \Big[(-(n+1))^{k_1 - 1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} ... b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{n-1}^{k_{n-1}} \Big] + b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n \Big\}, \tag{5}$$

где суммирование проводится по всем ненулевым комбинациям неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$, удовлетворяющим уравнению $k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = n$. Обозначим сумму в формуле (5) через S_n.

Сумма в равенстве (5) содержит $N = 2^{n-1}$ слагаемых, которые обозначим через d_κ, $1 \leq \kappa \leq N$: каждый ненулевой комбинации соответствует слагаемое d_κ. Тогда имеем

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^{N} d_\kappa. \tag{6}$$

Условимся говорить, что S_n имеет «порядок суммирования n».

В работе [7] доказана теорема (см. с. 108–110): если

$$L_b(z) = z \cdot \langle e^z; \alpha, b, b, ... \rangle, \tag{7}$$

где $\alpha \neq b$ и функция $L_a(w) = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, ... \rangle$ является обратной по отношению к функции (7), то показатели

$$a_1 = -\alpha, a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_n = ... = b - \alpha. \tag{8}$$

Из анализа цепной экспоненты (7) и полученной последовательности (8) возникает вопрос: какова будет обратная экспонента

$$L_a(w) = w \cdot \langle e^w; , a_1, a_2, ... \rangle,$$

если исходная экспонента

$$L_b(z) = z \cdot \langle e^z; b, \alpha, b, b, ... \rangle? \tag{9}$$

В этом сообщении приведем один из способов вычисления показателей a_n путем разложения исходной суммы S_n, имеющей порядок суммирования n, на частичные суммы, порядок суммирования которых строго меньше n.

Представим сумму S_n в виде

$$S_n = S_n^{(n)} + S_n^{n-1} + \ldots + S_n^{(n-l)} + \ldots + S_n^{(2)} + S_n^{(1)}, \tag{10}$$

где

$$S_n^{(n)} = S_n(k_1 = n) = d_1; S_n^{(n-l)} = S_n(k_1 = n-l) = \sum_{\kappa=2^{l-1}+1}^{2^l} d_\kappa, \tag{11}$$

$l = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$, (причем $d_N = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n$).

Из такого представления видно, что каждое слагаемое суммы S_n, соответствующее определенной ненулевой комбинации, удовлетворяющее уравнению $k_1 + \ldots + k_{n-1} = n$, содержится в сумме (6). С другой стороны, это слагаемое содержится в одной из частичных сумм разложения (10), и по номеру κ можно определить соответствующую ненулевую комбинацию.

Эта схема вычисления сумм используется для вычисления некоторых конкретных показателей обратных цепных экспонент.

Пример. В попытке ответить на вопрос, возникающий в связи с простой последовательностью (8), полученной из цепных экспоненты (7), в одной из работ представлены первые пять показателей обратной цепной экспоненты

$$L_a(w) = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, \ldots \rangle, \tag{12}$$

если исходная функция $L_b(z)$ дана цепной экспонентой (9). Сравнивая две цепные экспоненты (7) и (9), видим, что показатель $\alpha \neq b$ сдвинут с первого «этажа» на второй и это существенно затрудняет нахождение всей последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Первые четыре показателя находятся просто, без затруднений: $a_1 = -b$, $a_2 = \alpha - \beta$, $a_3 = -b$, $a_4 = \frac{3}{2}\alpha - b$. Пятый показатель выражается рациональной функцией параметров α и b:

$$a_5 = -\frac{1}{12(3\alpha - 2b)} \cdot (11\alpha^2 + 8\alpha \cdot b - 24b^2). \tag{13}$$

Здесь найден показатель a_6 при условии $\alpha \neq 1$, $b = 1$:

$$a_6 = \frac{-455\alpha^4 + 5168\alpha^3 - 10376\alpha^2 + 6768\alpha - 1152}{24(3\alpha - 2)(11\alpha^2 + 8\alpha - 24)}. \tag{14}$$

Однако, остается вопрос: какой рациональной функцией двух переменных α и b (или же одного переменного α, если в (9) взять $b = 1$) выражается показатель a_n цепной эспоненты (12), если $L_b(z)$ задана экспонентой (9)?

Литература

1. Буланов А.П. *Регулярность степеней бесконечной кратности* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62(5). – С. 49–78.

2. Буланов А.П. *Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающие поочередно два значения* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192(11). – С. 3-34.

3. Буланов А.П. *Цепные экспоненты и функции Ламберта* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Т. 43. – С. 64–71.

4. Дубинов А.Е, Галидакис И.Н. *Явное решение уравнения Кеплера* // Письма в ЭЧАЯ. – 2007. – Т. 4. – № 3(139). – С. 365–370.

5. Galidakis I. N. *On an application of Lambert's W function to infinite exponentials* // Complex Var. Theory Appl. – 2004. – V. 49. – № 11. – P. 759–780.

6. Galidacis I.N. *On solving the p-th complex auxiliamy equation* $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Var. Theory Appl. — 2005. – V. 50. – № 13. – P. 977–997.

7. Буланов А.П. *Нетривиальные последовательности, являющиеся показателями взаимно обратных функций Ламберта* // Компл. анализ и его приложения: Материалы VII Петрозаводской Межд. конф. – Петрозаводск, 2014. – С. 105–111.

DECOMPOSITION OF THE SUM OF THE RECURRENT FORMULA FOR EXPONENTS OF THE INVERSE LAMBERT FUNCTION INTO SIMPLER SUMS

A.P. Bulanov

We discuss the recurrent formula for determining the exponent of the inverse chain exponential which was obtained earlier as a generalization of the original Lambert function. We describe the method of evaluation of the exponent by decomposition of original sum into partial sums whose order of summation are strictly less than n. As example, by this method, we evaluate the inverse exponent a_6.

Keywords: chain exponential, exponent of chain exponential, mutually inverse chain exponentials, the order of summation, sequence of exponents, Lambert's HW-function.

УДК 517.95

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НА МОДЕЛЬНЫХ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.С. Вихарев[1]

1 *s.viharev@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий

Найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля о тривиальности ограниченных решений эллиптического неравенства специального вида, а также стационарного уравнения Гинзбурга-Ландау на модельных липшицевых многообразиях.

Ключевые слова: липшицевы многообразия, стационарное уравнение Гинзбурга-Ландау, теоремы типа Лиувилля.

Работа посвящена вопросам существования положительных решений стационарного уравенения Гинзбурга-Ландау и эллиптического неравенства специального вида на так называемых модельных липшицевых многообразиях. Опишем их подробнее.

Рассмотрим липшицево многообразие M_g, изометричное прямому произведению $R_+ \times S$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S – компактное липшицево многообразие без края) с метрикой:

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$